НОВЫЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ В МНОГОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Н. Р. Абубакиров, Р. Б. Салимов

Казанский государственный университет,
Казанская государственная архитектурно-строительная академия

Предложен новый подход к решению краевой задачи Гильберта, основанный на непосредственном построении решения однородной задачи.

Пусть D является $(m+1)$-связной областью, ограниченной замкнутыми простыми непересекающимися кривыми Ляпунова L_0, L_1, ... L_m, расположенными в плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, из которых L_0 охватывает остальные. Требуется найти функцию $F(z) = u(z) + iv(z)$, аналитическую и однозначную в области D, непрерывно продолжимую на ее границу $L = \cup_{k=0}^{m} L_k$, по краевому условию

$$\operatorname{Re}[(a(t) + ib(t))F(t)] = a(t)u(t) - b(t)v(t) = c(t), \tag{1}$$

где $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ – заданные на L действительные функции точки t контура L, имеющие разрывы первого рода в конечном числе точек t_{jk_j}, $k_j = \overline{1, p_j}$, $j = \overline{0, m}$, и удовлетворяющие условию Гельдера на каждой из замкнутых дуг L_j, соединяющих две соседние точки разрыва. Будем считать, что при обходе контура L_j в положительном направлении за точкой t_{jk_j} следует точка t_{jk_j+1}. Примем, что t_{j0} не является точкой разрыва коэффициентов и обозначим $t_{jp_j+1} = t_{j0}$, $j = \overline{0, m}$. Искомая функция $F(z)$ может быть неограниченной вблизи некоторых из точек t_{jk_j}, т.е. удовлетворять условию

$$|F(z)| < C_{jk_j}|z - t_{jk_j}|^{-\mu_{ik_j}},\ 0 \le \mu_{jk_j} < 1.$$

Если на L_j отсутствуют точки разрыва коэффициентов, то будем считать, что $p_j = 0$.

Краевое условие (1) запишем в виде

$$\operatorname{Re}[e^{-i\nu(t)}F(t)] = c(t)/|G(t)|, \tag{2}$$

где $G(t) = a(t) - ib(t)$, $\nu(t) = \arg G(t)$ – ветвь, непрерывная на каждой из дуг $\underline{t_{jk_j}t_{jk_j+1}}$ контура L_j, $j = \overline{0,m}$, выбранная так, чтобы для $k_j = \overline{1,p_j}$ выполнялось соотношение

$$0 \leq \nu(t_{jk_j} + 0) - \nu(t_{jk_j} - 0) < 2\pi.$$

Поскольку функция $G(t)$ непрерывна в точке t_{j0}, то $\nu(t_{jp_j+1} - 0) - \nu(t_{j0} + 0) = 2\pi l_j$, где l_j – целое число, $j = \overline{0,m}$. Следуя Н.И.Мусхелишвили [2, с. 256], точки разрыва коэффициентов, в которых разность $\nu(t_{jk_j} + 0) - \nu(t_{jk_j} - 0)$ обращается в нуль или равна π, будем называть особенными, а остальные точки разрыва коэффициентов – неособенными.

Основная идея решения задачи (2) заключается в построении функции $F_0(z)$ с условием $F_0(t) \neq 0$, $t \in L$, которая удовлетворяет краевому условию (2) при $c(t) \equiv 0$, т.е. $\mathrm{Re}[e^{-i\nu(t)}F_0(t)] = 0$, Это условие равносильно равенству $\cos[\arg F_0(t) - \nu(t)] = 0$, что влечет

$$\phi(t) = \nu(t) + \pi/2 - \beta_j(t)\pi + \pi n_j, \tag{3}$$

где n_j – произвольное целое число, $\beta_j(t)$ – функция, принимающая целые значения β_{jk_j} на каждой из дуг $t_{jk_j}t_{jk_j+1}$ контура L_j, $j = \overline{0,m}$. Теперь обозначим

$$\phi(t_{jp_j+1} - 0) - \phi(t_{j0} + 0) = 2\pi l_j - \pi\beta_{jp_j} = æ_j\pi, \; j = \overline{0,m}. \tag{4}$$

Число

$$æ = \sum_{j=0}^{m} æ_j \tag{5}$$

назовем индексом задачи (2), отвечающим данному классу решений. Пусть $æ_j = 2N_j - æ_{j0}$, где N_j – целое число, $æ_{j0} = 0$ при четном $æ_j$, $æ_{j0} = 1$ при нечетном $æ_j$. Тогда в силу (4), (5) имеем

$$æ/2 = N - \sum_{j=0}^{m} æ_{j0}/2 = \sum_{j=0}^{m}[\phi(t_{jp_j+1} - 0) - \phi(t_{j0} + 0)]/2\pi$$

где $N = \sum_{j=0}^{m} N_j$. Доказано, что функция $F_0(z)$ имеет в области D ровно m нулей $z_1, \dots, z_m$ и m полюсов $d_1, \dots, d_m$, причем

$$F_0(z) = H_0(z) + \sum_{j=1}^{m} \frac{\nu_k}{z - d_j} + i\beta_0,$$

где $H_0(z)$ – аналитическая в D функция. Разделив теперь краевое условие (2) на действительную функцию $ie^{-i\nu(t)}F_0(t)$, придем к задаче Шварца

$$\mathrm{Re}[\frac{F(t)}{iF_0(t)}] = \frac{c(t)}{|G(t)|ie^{-i\nu(t)}F_0(t)} = c_1(t),$$

решение которой теоретических трудностей не представляет [1, с. 370]. Имеет место

Теорема 1. *Если $N \geq m$, то решение краевой задачи Гильберта (2) с разрывными коэффициентами зависит от $æ - m + 1$ произвольных постоянных. Если $0 \geq N < m$ и r – ранг системы из $3m - æ$ действительных уравнений с $2m + 1$ неизвестными $\mathrm{Re}\nu_k$, $\mathrm{Im}\nu_k$, β_0, то при $2m+1 \geq r$ решение $F(z)$ задачи (2) зависит от $2m - r + 1$ произвольных постоянных, а при $2m + 1 < r$ существует лишь при выполнении $r - 2m - 1$ условий разрешимости. Если $N < 0$, то единственное решение $F(z)$ задачи (2) существует при выполнении $m - æ - 1$ условий разрешимости.*

При $m = 0$ из теоремы 1 вытекают результаты [3].

Применим полученные результаты к решению обратной краевой задачи по параметрам $(x, y, \arg z)$. Она заключается в нахождении конечной $(m + 1)$-связной области D_z с границей L_z, состоящей из $m + 1$ замкнутых кривых L_z^0, ... , L_z^m, причем L_z^0 охватывает остальные и $L_z^j = \cup_{s=1}^{3n} L_z^{js}$, а также аналитической в D_z и непрерывно продолжимой на ее границу функции $w(z)$, если

$$\begin{array}{ll} w(z)\,|_{z\in L_z^{j3p+1}} = f_{j3p+1}(x^*), & m_{jp} + e_{jp} \leq x^* \leq n_{jp} + e_{jp}; \\ w(z)\,|_{z\in L_z^{j3p+2}} = f_{j3p+2}(y), & 0 \leq y \leq q_{jp}; \\ w(z)\,|_{z\in L_z^{j3p+3}} = f_{j3p+3}(\theta), & \alpha_{jp}^1\pi \leq \theta \leq \alpha_{jp}^2\pi. \end{array}$$

Постоянные $0 < m_{jp} < n_{jp}$ и $q_{jp} > 0$, $p = \overline{0, n-1}, j = \overline{0, m}$ задаются заранее, e_{jp} и $0 \leq \alpha_{jp}^1 < \alpha_{jp}^2 \leq 1$ определяются в ходе решения. Переменная $x = \mathrm{Re}z$ на каждой из дуг L_z^{j3p+1} связана с x^* соотношением $x^* = x + e_{jp}$. Гельдеровы функции f_{js} определяют в плоскости w границу $L_w = \cup L_w^j$ конечной $(m+1)$-связной области D_w, причем L_w^0 охватывает остальные и все L_w^j являются кривыми Ляпунова. Для определения функции $z(w)$, обратной к искомой, аналитической и однозначной в D_w и непрерывно продолжимой на границу, получаем следующую краевую задачу

$$\mathrm{Re}z(t) = x^*(t),\ t \in L_w^{j3p+1};\ \mathrm{Im}z(t) = y(t),\ t \in L_w^{j3p+2};$$

$$\arg z(t) = \theta(t), \; t \in L_w^{j3p+3}.$$

Запишем эти соотношения в виде одного краевого условия задачи Гильберта $\mathrm{Re}\left[e^{-i\nu(t)}z(t)\right] = c(t)$, краевой задачи Гильберта с разрывными коэффициентами в $(m+1)$-связной области D_w. Так как искомая область D_z предполагается конечной, функцию $z(w)$ необходимо считать ограниченной в окрестности всех точек t_{js}. Тогда индекс полученной задачи Гильберта равен $æ = \sum_{j=0}^{m} æ_j = -(m+1)n$, а искомая функция $z(w)$ имеет вид

$$z(w) = i\frac{\left(\prod_{j=0}^{m}\prod_{s=1}^{3n}(w-t_{js})^{\omega_{js}/\pi}\right)\prod_{j=1}^{m}(w-w_j)}{\prod_{j=0}^{m}\psi_j(w)\prod_{j=1}^{m}(w-d_j)}\exp\left(i\left[S(\tilde{c}(t),w)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+p_0(w)\right]\right)\left[S(c_4(t),w)+\sum_{k=1}^{m}\frac{\mu_k}{w-w_k}+i\gamma_0\right]. \qquad (6)$$

Итогом рассуждений является

Теорема 2. *Решение ОКЗ по параметрам* $(x, y, \arg z)$ *является единственным и определяется формулой (6) при выполнении* $m-[r-(m+1)n]$ *условий разрешимости, где* r *– ранг системы уравнений относительно неизвестных* $\mathrm{Re}\nu_k$, $\mathrm{Im}\nu_k$, β_0, e_{jp}.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гахов Ф.Д. *Краевые задачи.* – 3-е изд. – М.: Наука, 1977. – 640 с.

2. Мусхелишвили Н.И. *Сингулярные интегральные уравнения.* – М.: Наука, 1968. – 599 с.

3. Салимов Р.Б., Шабалин П.Л. *Новый подход к решению краевой задачи Гильберта с разрывными коэффициентами для аналитической в круге функции* // Труды Матем. центра им. Н.И.Лобачевского. – Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва, 1998. – С. 206–215.